DEVOIR NUMÉRO 3 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 d'après **ECRICOME** 2021 Exercice 1.

On note dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = & -2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n \end{cases}.$$

1. Calculer le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que la matrice $M - \lambda I$ est inversible pour toute les valeurs de λ sauf $\lambda = 1$ et $\lambda = -3$.

Dans le cas où $M - \lambda I$ est inversible, on ne demande pas de calculer l'inverse.

3. Trouver alors une base des noyaux des deux matrices $M - I$ et $M + 3I$.

4. **a.** À l'aide de la question **1**, déterminer l'expression de M^2 en fonction de M et I.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = u_n M + v_n I.$$

5. **a.** Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. On considère les deux scripts incomplets Python ci-dessous. A désigne la matrice A et C désigne la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Compléter ces deux scripts pour qu'ils calculent et affichent les termes u_n et v_n pour un entier naturel n choisi par l'utilisateur.

Date: 16 Novembre 2023 08h30-12h00.
http://louismerlin.fr.

```python
# Script 1

import numpy as np
import numpy.linalg as alg

n = input('n=')
A = np.array([...,...,...])
C = np.array([[0],[1]])
C = ...
print(...)
```

```python
# Script 2

import numpy as np
import numpy.linalg as alg

n = input('n=')
A = np.array([...,...,...])
C = np.array([[0],[1]])
for k in range(n-1) :
  C = ...
print(...)
```

6. **a.** Résoudre le système $AX = X$. On note V_1 un générateur des solutions de système.
Résoudre le système $AX = -3X$. On note V_2 un générateur des solutions de ce système.

b. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.

c. Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$.

d. Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $A^n = QD^nQ^{-1}$.

e. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$A^n = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}$$

f. Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.

7. **a.** Expliciter pour tout entier naturel n les neuf coefficients de la matrice M^n.

b. On suppose avoir compléter correctement l'un des deux scripts Python de la question **5.c** et on rajoute les lignes suivantes :

```python
M = np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
I = np.eye(3)
print(C[1]*M + C[2]*I)
```

Que renvoie ce nouveau script lorsqu'on choisit une valeur de l'entier naturel n ?

Exercice 2 **ECRICOME** 2021 Exercice 3.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale à la durée de fonctionnement d'un composant électronique jusqu'à sa première panne éventuelle.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = P([X > n])$.
On suppose dans toute cette partie que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
Le composant est mis en service à l'instant 0. On a ainsi $u_0 = 1$.

1. **a.** Soit n un entier naturel non nul. Justifier l'égalité d'événements :

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]\,.$$

b. Justifier que pour tout entier naturel non nul

$$u_{n-1} - u_n = P([X = n]).$$

2. On suppose que la probabilité que le composant tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$ vaut $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$P_{[X>n-1]}([X = n]) = \frac{2}{5}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$P_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - P_{[X>n-1]}([X = n]).$$

b. Établir que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité $u_n = \frac{3}{5}u_{n-1}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de u_n en fonction de n.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a

$$P([X = n]) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

b. En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

c. Donner l'espérance et la variance de X.

Partie B.

Un appareil est constitué de deux composants électroniques dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Cet appareil ne fonctionne que si au moins un des deux composants est en état de marche.

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à la durée de vie de chacun de ces composants et Z la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil. La durée de vie de l'appareil est donc égale à la plus grande des durées de vie de ces deux composants.

On suppose que X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

4. **a.** On rappelle qu'en Python, l'instruction `np.rand()` renvoie un réel choisi au hasard et uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

Recopier et compléter le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction `geom` qui simule une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$.

```
import numpy.random as rd

def geom() :
  X = ...
  while ... :
    X = ...
  return X
```

b. Recopier et compléter le script ci-dessous pour qu'il crée une fonction simulZ() qui simule la variable aléatoire Z.

```
import numpy.random as rd

def simulZ() :
  X1 = geom()
  X2= geom()
  if X1>X2 :
    return ...
  else :
    return ...
```

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $P([X_1 \leqslant n]) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

6. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité

$$[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]\,.$$

b. En déduire la valeur de $P([Z \leqslant n])$ pour tout entier naturel n.

c. Pour tout entier naturel n non nul, en remarquant que $P([Z = n]) = P([Z \leqslant n]) - P([Z \leqslant n-1])$, montrer que

$$P([Z = n]) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

7. Justifier la convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$ puis vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P([Z = n]) = 1$.

8. **a.** Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{16}{25}$.
Justifier que pour tout entier naturel n non nul

$$nP([Z = n]) = 2nP([X_1 = n]) - nP([Y = n]).$$

b. En déduire que Z admet une espérance et que

$$E(Z) = 2E(X_1) - E(Y).$$

En déduire la valeur de $E(Z)$.

Exercice 3 **EDHEC** 2022 Exercice 3.

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_n définie, pour tout réel x de $[0,1]$ par
$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$
Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a. Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ (on prononce gamma) sa limite.

b. Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. **a.** Déterminer les deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout k de $\mathbb{N}^*$, on ait
$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k},$$
puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k).$$

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c. Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n.

7. **a.** En utilisant l'encadrement ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}.

b. Déterminer $T_n - S_n$, puis compléter le script Python suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```python
import numpy as np

n = 1
s = 1-np.log(2)
while ... :
  n = ...
  s = s + ...
print(...)
```